Практикалық сабақ №8

Тақырыбы: Үш еселі интеграл.

Мақсаты: Үш еселі интегралды есептеу. Үш еселі интегралда цилиндрлік және сфералық координаттарға көшу.

Мысал 1. Үш еселі интегралды берілген аймақ бойынша есептеу керек.

$$\iiint_V (x+y)dxdydz, \qquad V:(x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=2).$$

Шешуі:

$$\iiint_V (x+y)dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} (x+y)dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y)\cdot z \Big|_0^{2-x-y} dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left(2(x+y)-(x+y)^2\right)dy = \int_0^2 dx \left((x+y)^2 - \frac{(x+y)^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x} =$$

$$= \int_0^2 \left(4 - x^2 - \frac{8}{3} + \frac{x^3}{3}\right)dx = \left(\frac{4}{3}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Мысал 2. $\iiint_V zdxdydz$ интегралды есептеу керек, егер интегралдау аймағы $V=\{(x,y,z): x^2+y^2<z^2\le 1\}$ болса, демек $x^2+y^2=z^2$ беті және $z=1$ жазықтығымен шенелген дене бойынша.

Шешуі: Интегралды цилиндрлік кординаттарға көшу арқылы есептейміз:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \quad z=z,\ dxdydz = Jdrd\varphi dz = rdrd\varphi dz.$$

Цилиндрлік координаттар жүйесінде интегралдау аймағы V' мына теңсіздіктер арқылы анықталады: $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 1,\ r\le z\le 1$. Сондықтан,

$$\iiint_V zdxdydz = \iiint_{V'} zrdrd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_r^1 zdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_r^1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(\frac{1}{2}-\frac{r^2}{2}\right)dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}d\varphi = \frac{1}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Мысал 3. $\iiint_V \frac{dxdydz}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$. Интегралдау аймағы $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\}$, демек радиусы 1-ге тең, центрі координат басында жатқан шар.

Шешуі: Интегралды сфералық координаттарға көшу арқылы есептейміз:

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta, y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta; \quad dxdydz=\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Сфералық координаттар жүйесіндегі V-ның бейнесі:

$$V' = \{M'(\rho,\theta,\varphi),\ 0 \le \rho \le 1,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

Сондықтан,

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \iiint\limits_{V'} \frac{\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta}{\left(1+\rho^2\right)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{\rho^2 d\rho}{(1+\rho^2)^{3/2}} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= -\frac{4\pi}{\sqrt{2}} \ell n\left|1+\sqrt{2}\right|$$ болады.

Аудиториялық жұмысы: Үш еселі интегралды есептеу: [8] №№ 4076, 4078, 4081. *Үш еселі интегралда айнымалыларды алмастыру:* [8] №№ 4087,4091.

Үй жұмысы

№№ 4077, 4082. №№ 4088,4092.